MP - Sujet 1

9 septembre 2013

Exercice 1

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Montrer, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0, 1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\theta_x)$$

3. Etudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 2

Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

MP - Sujet 2

9 septembre 2013

Exercice 1

1. Donner le développement limité de $ln(1+x)$ sous forme développée et compacte
   Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
3. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 2

1. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral
2. Etablir que pour tout $x \in [0, \pi/2]$,
$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

MP - Sujet 3

9 septembre 2013

Exercice 1

1. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de $arctanx$, sous la forme développée et compacte. Donner l'expression de la dérivé de $arctanx$.
2. Former le développement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ de $\arctan(\mathrm{e}^x)$.
3. Quelle est l'allure de cette fonction autour de ce point ?

Exercice 2

1. En exploitant une formule de Taylor adéquate établir

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

2. Démontrer la formule de Taylor utilisée

MP - Sujet 1

16 septembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sim ln(n)$$

Exercice 2

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+$$

a) Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.
b) Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente.
c) Observer que, lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

MP - Sujet 2

16 septembre 2013

Exercice 1 : Questions de cours

1. Rappeler les conditions de convergence d'une série géométrique
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente. Établir alors

$$\left|\sum u_n\right| \leq \sum |u_n|$$

Exercice 2

On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t$$

déterminer le signe de I.

MP - Sujet 3

16 septembre 2013

Exercice 1 : Questions de cours

1. Rappeler les cas de convergence pour les séries de Riemann.
2. Rappeler la règle de D'Alembert.
3. Démontrer cette dernière.

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x$$

MP - Semaine 3 - Sujet 1

30 septembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G, deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si

$$F \cap G = \{0_E\}$$

Exercice 2

Existence et calcul de

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{b)} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

MP - Semaine 3 - Sujet 2

30 septembre 2013

Exercice 1 : Questions de cours

Démontrer le théorème suivant : Soit E un espace-vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, alors

1. Tout supplémentaire de $Kerf$ est isomorphe à Imf

2. $dimE = dimKerf + rgf$ (formule du rang)

Exercice 2

Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

MP - Semaine 3 - Sujet 3

30 septembre 2013

Exercice 1 : Questions de cours

Démontrer le critère spécial des séries alternées

Exercice 2

1. Rappeler la formule du rang.

2. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :
   a) $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$.
   b) $\mathrm{rg}(f \circ g) \geqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim E$.

MP - Semaine 4 - Sujet 1

30 septembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soir $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

2. Donner le définition d'un hyperplan

Exercice 2

Formule de Grassmann :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$$

MP - Semaine 4 - Sujet 2

30 septembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer le théorème suivant : Soit E un espace-vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, alors

1. Tout supplémentaire de $Kerf$ est isomorphe à Imf

2. $dimE = dimKerf + rgf$ (formule du rang)

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base duale de la base canonique de E. On note v et w les éléments de $E^\star$ définis par

$$v(P) = P(1) \text{ et } w(P) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $e' = (e_1, v, w)$ est une base de $E^\star$.
b) Donner la matrice de passage de e à e'.
c) Donner la base antéduale de e'.

MP - Semaine 4 - Sujet 3

30 septembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer le théorème suivant :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, E)$ vérifient $f \circ g = Id_F$, alors f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Exercice 2

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique vérifiant

$$\forall P \in \mathbb{R}_n\left[X\right], \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k)$$

MP - Semaine 5 - Sujet 1

7 Octobre 2013

Exercice 1 : Question de cours

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soir $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \neq 0$$

Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

MP - Semaine 5 - Sujet 2

7 Octobre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer le théorème suivant : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que

$$\forall \lambda \in Sp(u),\ 1 \leq dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

Exercice 2

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal Π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et Π_u sont premiers entre eux.
Observer qu'alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

MP - Semaine 5 - Sujet 3

7 Octobre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soient E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les valeurs propres de u figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur de u.

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $Q(X) := (X-1)^2(X-2)^3$ un polynôme annulateur de A.

1. Donner les spectres possible de A
2. Donner les polynômes caractéristiques possibles de A
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^p par $(X-1)(X-2)$
4. On suppose A diagonalisable. Soit $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_p et b_p tels que $A^p = a_p A + b_p I_n$.

MP - Semaine 6 - Sujet 1

14 Octobre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur un intervalle I, montrer que $\|\cdot\|_\infty^I$ est une norme.

Exercice 2

On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continues.
On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

pour toute $f \in E$.
On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la suite (f_n).
2. Soit $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, trouver une équation différentielle dont f est solution. Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

MP - Semaine 6 - Sujet 2

14 Octobre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, montrer que l'on peut permuter les symboles d'intégrale et de limite.

Exercice 2

On définit (u_n) suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire que pour $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+p} - u_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

3. Établir que pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(u_n(x))$ est de Cauchy.
4. Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

MP - Semaine 6 - Sujet 3

14 Octobre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer le théorème suivant :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I vers $\mathbb{K}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u sur I et si $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, alors

1. u est de classe $\mathscr{C}^1$
2. $\lim_{n\to+\infty} u'_n = u'$

Exercice 2

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout x dans $[0,1]$ par $g_n(x) := nx^n(1-x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tracer le graphe de g_n.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

MP - Semaine 7 - Sujet 1

15 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

1. Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur un intervalle I, montrer que $\|\cdot\|_\infty^I$ est une norme.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, montrer que l'on peut permuter les symboles d'intégrale et de limite.

Exercice 2

Etablir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-\mathrm{sh}x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

MP - Semaine 7 - Sujet 2

15 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer le théorème suivant :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et on peut dériver terme à terme.

Exercice 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de
$$\sum a_n^2 z^n$$
2. Déterminer le rayon de convergence de
$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

MP - Semaine 7 - Sujet 3

15 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer le théorème suivant :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I vers $\mathbb{K}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u sur I et si $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, alors

1. u est de classe $\mathscr{C}^1$
2. $\lim_{n\to+\infty} u'_n = u'$

Exercice 2

Développer en série entière $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

MP - Semaine 8 - Sujet 1

15 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que toute boule ouverte est une partie ouverte.

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N).

1. On suppose $A \subset B$. Etablir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$ d'autre part.
3. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

MP - Semaine 8 - Sujet 2

15 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer le théorème suivant :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et on peut dériver terme à terme.

Exercice 2

On désigne par p_1 et p_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $p_i(x_1, x_2) = x_i$.

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si F est fermé et que $p_2(F)$ est borné, alors $p_1(F)$ est fermé.

MP - Semaine 8 - Sujet 3

15 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer le "théorème de recollement" : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite l. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 2

Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. en procédant à une intégration terme à terme.
2. en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

MP - Semaine 9 - Sujet 1

18 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que toute boule ouverte est une partie ouverte.

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. f est continue ;

2. $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

3. $\forall B \in \mathcal{P}(F), \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$;

4. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B^{\circ}) \subset \big(f^{-1}(B)\big)^{\circ}$.

MP - Semaine 9 - Sujet 2

18 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Exercice 2

On désigne par p_1 et p_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $p_i(x_1, x_2) = x_i$.

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si F est fermé et que $p_2(F)$ est borné, alors $p_1(F)$ est fermé.

MP - Semaine 9 - Sujet 3

18 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer le "théorème de recollement" : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite l. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N).

1. On suppose $A \subset B$. Etablir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$ d'autre part.
3. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

MP - Semaine 10 - Sujet 1

25 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que toute partie compacte est fermée et bornée.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?

2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n-2$. L'ensemble $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

MP - Semaine 10 - Sujet 2

25 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soient $\mathbb{K}$ un compact de E et $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 2

Un sous-groupe H de $(G, .)$ est dit distingué si

$$\forall x \in H, \forall a \in G, axa^{-1} \in H$$

1. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes au départ de $(G, .)$ est distingué.

2. Soient H, K deux sous-groupes de $(G, .)$. On suppose le sous-groupe H distingué, montrer que l'ensemble

$$HK = \{xy/x \in H, y \in K\}$$

est un sous-groupe de $(G, .)$.

MP - Semaine 10 - Sujet 3

25 Novembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides et bornés d'un espace vectoriel normé E complet. On suppose que $\delta(F_n) \to 0$ en notant

$$\delta(F_n) = \sup_{x,y \in F_n} \|y - x\|$$

Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

MP - Semaine 11 - Sujet 1

2 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Exercice 2

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib/(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau (appelé anneau des entiers de Gauss).

2. Montrer que
$$\begin{array}{cccc} N: & \mathbb{Z}[i] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & a+ib & \longmapsto & a^2+b^2 \end{array}$$
est un morphisme de $(\mathbb{Z}[i], .)$ dans $(\mathbb{Z}, .)$.

3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

4. Soit $(u,v) \in \mathbb{Z}[i]^2$, avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{Z}[i]$ tel que
$$\begin{cases} u = vq + r \\ N(r) < N(v) \end{cases}$$

5. Montrer que tout idéal I de $\mathbb{Z}[i]$, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $I = \alpha\mathbb{Z}[i]$.

MP - Semaine 11 - Sujet 2

2 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Démontrer le théorème de Bezout.

Exercice 2

1. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2 + x + \bar{7} = \bar{0}$$

2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2 - \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}$$

MP - Semaine 11 - Sujet 3

2 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + \sqrt{2}b / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que
$$N : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a + \sqrt{2}b & \longmapsto & a^2 - 2b^2 \end{array}$$
est un morphisme de $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], .)$ dans $(\mathbb{Z}, .)$.

3. Montrer que $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversibles si et seulement si $N(u) \in \{-1, 1\}$.

MP - Semaine 12 - Sujet 1

09 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Exercice 2

Soit A un sous-anneau d'un corps $\mathbb{K}$.
On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \in A \text{ ou } x^{-1} \in A$$

et on forme I l'ensemble des éléments de l'anneau A non inversibles.

1. Montrer que I est un idéal de A.

2. Montrer que tout idéal de A autre que A est inclus dans I.

MP - Semaine 12 - Sujet 2

09 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soient I_1 et I_2 deux idéaux de cet anneau. Montrer que $I_1 \cap I_2$ est un idéal de $(A, +, \times)$.

Exercice 2

Calculer A^n avec
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
de deux manières différentes.

Exercice 2

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal Π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et Π_u sont premiers entre eux.

MP - Semaine 12 - Sujet 3

09 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soient $(A, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $x \in A$. On note $\mathbb{K}[x]$ la sous-algèbre commutative de A engendrée par x. Montrer que $\mathbb{K}[x]$ est de dimension finie si et seulement si x admet au moins un polynôme annulateur (non nul).

Exercice 2

Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit premier si, et seulement si,

$$\forall x, y \in A, xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I$$

1. Donner un exemple d'idéal premier dans $\mathbb{Z}$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est premier.

3. Soient J et K deux idéaux de A. Montrer

$$J \cap K = I \Rightarrow (J = I \text{ ou } K = I)$$

4. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif dont tout idéal est premier. Etablir que A est intègre puis que A est un corps.

MP - Semaine 13 - Sujet 1

16 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On définit l'application $\|\cdot\| \ : \ x \ \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ sur E.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Exercice 2

Soit
$$E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,\pi], \mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\right\}$$

1. Montrer que
$$N : f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$
est une norme sur E.

2. Montrer que N est équivalente à
$$\nu : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

MP - Semaine 13 - Sujet 2

16 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que deux normes équivalentes, sur un espace vectoriel normé E, donnent la même topologie.

Exercice 2

Soient l'espace $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) / f(0) = 0 \right\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

1. Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.

2. Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

MP - Semaine 13 - Sujet 3

16 Décembre 2013

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer que pour $a, b \geqslant 0$
$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ et } \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

2. Établir
$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$
et en déduire
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

3. En écrivant
$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$
justifier
$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

4. Conclure que $\| \,.\, \|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

MP - Semaine 14 - Sujet 1

6 Janvier 2014

Exercice 1 : Question de cours

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On définit l'application $\| \cdot \| \ : \ x \ \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ sur E.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

2. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \neq 0$$

Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

MP - Semaine 14 - Sujet 2

6 Janvier 2014

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que deux normes équivalentes, sur un espace vectoriel normé E, donnent la même topologie.

Exercice 2

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal Π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et Π_u sont premiers entre eux.
Observer qu'alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

MP - Semaine 14 - Sujet 3

6 Janvier 2014

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. f est continue ;

2. $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

3. $\forall B \in \mathcal{P}(F), \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$;

4. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B^\circ) \subset \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$.

MP - Semaine 15 - Sujet 1

13 Janvier 2014

Exercice 1 :

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + p(x)y = 0$ s'annule.

Exercice 2

Soit

$$E : y' = x^2 + y^2$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de E vérifiant $y(0) = 0$.

2. Montrer que y est une fonction impaire.

3. Étudier la monotonie et la concavité de y.

4. Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

5. Dresser le tableau de variation de y.

MP - Semaine 15 - Sujet 2

13 Janvier 2014

Exercice 1 :

Soient q une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et f une solution non nulle sur $[a, b]$ de l'équation différentielle

$$(E) : y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 2

On considère l'équation

$$y' = x + y^2$$

Soit y une solution maximale définie sur un intervalle I.

1. Montrer que I est majoré. On pose $b = \sup I$.

2. Quelle est la limite de y en b ? Montrer que y est croissante au voisinage de b.

3. Trouver un équivalent de y au voisinage de b.

MP - Semaine 15 - Sujet 3

13 Janvier 2014

Exercice 1 : Question de cours

On considère l'équation différentielle

$$E_0 : y'' - \mathrm{e}^x y = 0$$

1. Soit y une solution de E_0 sur $\mathbb{R}$. Etudier la convexité de y^2.
   En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0, 1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0, 1)$$

   Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.

3. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle

$$E : y'' - \mathrm{e}^x y = f(x)$$

   admet une unique solution y telle que

$$y(0) = y(1) = 0$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x - t) f(t) \,\mathrm{d}t = 1 - x \ (*)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Trouver toutes les fonctions f vérifiant (*).