TD 7 : Nombres réels et suites numériques

Exercice 1
Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes :

a) $u_n = 3^{\frac{1}{n}}$;

b) $u_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$;

c) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$;

d) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$;

e) $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$;

f) $u_n = \sqrt{n^2 - n} - n$;

g) $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

h) $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$

i) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

Exercice 2
Expliciter le terme général des suites suivantes, définies par récurrence :

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} = -2a_k$ et $a_1 = 2$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$, $2b_p = b_{p-1}$ et $b_1 = 2$.

c) Pur tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n - c_{n+1} = 3$ et $c_0 = 10$.

Exercice 3
Soit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 4. \end{cases}$$

a) Calculer les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Si (u_n) converge, quelle est la valeur de sa limite l ?

c) On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$. Montrer que cette suite est géométrique : on précisera son 1$^{\text{er}}$ terme et sa raison.

d) Déterminer l'expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) A-t-on $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$?

Exercice 4
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}. \end{cases}$$

a) À l'aide du calcul des premiers termes, conjecturer l'expression de u_n.

b) Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 5
Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée des réels u_0 et v_0 et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{4}(3u_n + v_n) \end{array} \right.$$

a) Étudier les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} d_n & = & u_n - v_n \\ s_n & = & u_n + v_n \end{array} \right.$$

b) Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{10^n}{n!}$$

a) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) En écrivant que pour tout $n \geq 11$, on a :

$$u_n = \prod_{k=0}^{10} \frac{10}{k} \times \prod_{k=11}^{n} \frac{10}{k}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 7
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1, \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}. \end{array} \right.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est croissante.
c) Montrer par l'absurde que cette suite ne converge pas.

Exercice 8
Soit $(\alpha, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$.
b) Pour quelles valeurs de k la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 9
Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et donner un encadrement de leur limite.

Exercice 10
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$u_n = o(v_n) \ \text{ et } \ v_n = o(w_n).$$

Montrer que : $u_n = o(w_n)$.

Exercice 11
Soient les suites $(u_n)_{n>1}$ et $(v_n)_{n>1}$ définies par :

$$\forall n > 1,\ u_n = -\frac{1+n^2}{1-n^4} \qquad v_n = \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que $(u_n)_{n>1}$ et $(v_n)_{n>1}$ sont équivalentes.

Exercice 12
Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, définies par :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{2^n}$.

Exercice 13
Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1 - \frac{n^2-1}{n^2+1}$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} < u_n < \frac{n+1}{n}$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \ln(n)$.

Exercice 14
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \frac{1}{n} + 1.$$

Exercice 15
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicaux}}.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de $u_{n+1}^2 - u_n^2$. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 16
Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée des réels x_0 et y_0 et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= \frac{x_n - y_n}{2} \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = x_n + iy_n.$$

Exercice 17
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{6}(x^2+8).$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Établir le tableau de variations de f.

c) Étudier le signe de $f(x) - x$ selon les valeurs de x.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+, \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

d) Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ?

e) On suppose que $u_0 = 1$.

  (i) Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  (ii) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

  (iii) Que peut-on conclure ?

f) Mêmes questions avec $u_0 = 3$, puis $u_0 = 5$.